Το απόλυτο σχετικό σφάλμα πολλαπλασιάζεται κατά τον πολλαπλασιασμό.

18/10/17

(*) Θα λέγει δέλτα από όλα αυτά

Άσκηση

Να βρεθεί φράγμα για το απόλυτο σχετικό σφάλμα κατά τον πολ/μό $x \cdot y \cdot \omega$, όπου $x, y, \omega$ ανήκουν στο είδος των αριθμών μηχανής.

Λύση

Υπολογίζουμε το $z = fl(fl(fl(x) \cdot fl(y)) \cdot fl(\omega))$

$$= fl(x \cdot y(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3))\omega(1+\varepsilon_4)$$

$$= x \cdot y \cdot \omega(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)(1+\varepsilon_4) \cdot (1+\varepsilon_5)$$

$$= x \cdot y \cdot \omega(1+\varepsilon)^5$$

$$= x \cdot y \cdot \omega(1+5\varepsilon+10 \cdot \varepsilon^2+\dots)$$

$$\approx xy\omega(1+5\varepsilon)$$

$$\left| \frac{xy\omega(1+5\varepsilon)-xy\omega}{xy\omega} \right| = 5|\varepsilon| \le 5u.$$

(*) Για τον πολ/μό $\kappa$ αριθμών $x_1, x_2, \dots, x_\kappa$ το απόλυτο σχετικό σφάλμα φράσσεται από $(2\kappa-1)u$.

$\boxed{\text{ΔΙΑΙΡΕΣΗ}}$

Για τη διαίρεση $\frac{x}{y}$, υπολογίζουμε:

$$z = fl\left(\frac{fl(x)}{fl(y)}\right) = \frac{x(1+\varepsilon_1)}{y(1+\varepsilon_2)} \cdot (1+\varepsilon_3)$$

▸ Παρατήρηση: Παρατηρούμε ότι $\frac{1}{1+\varepsilon_2} = 1+d$

όπου $d = \frac{-\varepsilon_2}{(1+\varepsilon_2)}$

$$|d| = \frac{|\varepsilon_2|}{|1+\varepsilon_2|} \le \frac{|\varepsilon_2|}{1-|\varepsilon_1|} \le \frac{u}{1-u} = u(1+u+u^2+\dots)$$
$$= u + 8, \text{ όπου}$$

8 όροι από $u^2$ και άνω.

$$z = \frac{x}{y}(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_3)(1+d) = \frac{x}{y}(1+\varepsilon)^2(1+d)$$

Απόλυτο σχετικό σφάλμα:

$$\left|\frac{z-\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}}\right| = \left|\frac{\frac{x}{y}(1+\varepsilon)^2(1+d)-\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}}\right| = \left|(1+\varepsilon)^2(1+d)-1\right|$$

$$= |2\varepsilon + d + \varepsilon^2 + 2\varepsilon d + \varepsilon^2 d|$$
$$\le 2|\varepsilon| + |d| + |\varepsilon|^2 + 2|\varepsilon||d| + |\varepsilon|^2|d|$$
$$\le 3u + a \approx 3u$$

## Πρόσθεση - Αφαίρεση

Για τον υπολογισμό του $x+y$ υπολογίζουμε το

$$z = fl(fl(x)+fl(y)) = fl(x(1+\varepsilon_1)+y(1+\varepsilon_2))$$
$$= x(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_3) + y(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)$$
$$= x(1+\varepsilon)^2 + y(1+\delta)^2$$
$$= x + 2x\cdot\varepsilon + x\cdot\varepsilon^2 + y + 2y\cdot d + y\cdot d^2$$
$$\approx x + y + 2(x\varepsilon + y d)$$

Το απόλυτο σχετικό σφάλμα είναι περίπου ίσο με

$$\left|\frac{z-(x+y)}{(x+y)}\right| = \left|\frac{x+y+2(x\varepsilon+y\delta)-(x+y)}{(x+y)}\right|$$

$$= 2\left|\frac{x\varepsilon+y\delta}{x+y}\right|$$

$$\le 2 \cdot \frac{|x|\cdot|\varepsilon| + |y|\cdot|\delta|}{|x+y|}$$

$$< 2u \cdot \frac{|x|+|y|}{|x+y|}$$

Αν $x$ και $y$ ομόσημοι τότε $|x|+|y|=|x+y|$ όπου το φράγμα είναι $2u$. Αν $x$ και $y$ ετερόσημοι και $|x|\approx|y|$, τότε το σφάλμα γίνεται πολύ μεγάλο.

Συμπέρασμα: Η αφαίρεση είναι μη ευσταθής πράξη.

<u>Παράδειγμα</u>

1) Για τον υπολογισμό της $\frac{x^k-y^k}{x-y}$, $x,y>0$.

$$\frac{x^k-y^k}{x-y} = \sum_{i=0}^{k-1} x^i y^{k-1-i}$$

2) $1-\cos a$, όταν $a$ κοντά στο $0$.

$$1-\cos a = 1-\left(1-2\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)\right) = 2\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)$$

Μετάβαση σφαλμάτων στον υπολογισμό αθροισμάτων ομόσημων αριθμών.

Το άθροισμα $n$ αριθμών: $S_n=\sum_{i=1}^{n} a_i$, έστω για απλότητα ότι ο $a_i$ είναι αριθμός μηχανής.

Ο Αλγόριθμος θα είναι $S_1=a_1$, $S_k=S_{k-1}+a_k$

Αντί του $S_k$ υπολογίζουμε τις προσεγγιστικές τιμές.

$\tilde{S}_k$: $\tilde{S}_1 = S_1 = a_1$, $\tilde{S}_k = fl(\tilde{S}_{k-1}+a_k)$

$\tilde{S}_1 = S_1 = a_1$

, $\tilde{S}_2 = fl(\tilde{S}_1 + a_1) = (a_1 + a_2)(1+\varepsilon_1)$

, $\tilde{S}_3 = fl(\tilde{S}_2 + a_3) = (a_1 + a_2)(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2) + a_3(1+\varepsilon_2)$

, $\tilde{S}_4 = fl(\tilde{S}_3 + a_4) = (a_1 + a_2)(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2) + a_3(1+\varepsilon_2) \cdot (1+\varepsilon_3) + a_4(1+\varepsilon_3) =$

$= (a_1 + a_2)(1+d_1)^3 + a_3(1+d_2)^2 + a_4(1+d_3)$

$\approx (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_1 + a_2)\cdot 3d_1 + a_3 \cdot 2d_2 + a_4 d_3$

$|\tilde{S}_4 - S_4| \leq (a_1 + a_2) 3u + a_3 \cdot 2u + a_4 \cdot u =$
$= (3(a_1 + a_2) + 2a_3 + a_4)u$

$|\tilde{S}_n - S_n| \leq ((n-1)(a_1 + a_2) + (n-2)a_3 + \dots + 2a_{n-1} + a_n) \cdot u.$

Αν διατάξουμε την ακολουθία $a_i$ σε αύξουσα σειρά, θα έχουμε το μικρότερο δυνατό σφάλμα.

$e^{-12,5}$

Για τον υπολογισμό του $e^x$ υπολογίζεται το $\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$ για κάποιο n.

Για $n = 34$ με απλή ακρίβεια ($B=10$, $t=7$ ψηφ.)

Άρα βρήκα ότι $e^{-12.5} \approx 16.62916 \times 10^{-2}$.

Ακριβής τιμή είναι $.3726653 \cdot 10^{-5}$.

Οι όροι είναι $1, -12.5, 78.125 \dots$ $13^{ος}$: $36379.68$

Για τον $13^{ο}$ όρο: σφάλμα της τάξης του $10^{-2}$

Το αποτέλεσμα είναι σφάλμα.

$e^{-12.5} = \frac{1}{e^{12.5}} = .3726653.$